ENS de Lyon | Algèbre 1
L3 | 2024-2025

TD 9 : Produits tensoriels

Les exercices marqués d'un seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Exercices importants

Exercice 1.

Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie supérieure à 2.

1. Donner un élément de $E \otimes F$ qui n'est pas un tenseur simple.
2. Donner un exemple d'espaces vectoriels E, F, G et d'application linéaire $h : E \otimes F \to G$ telle que $h(x \otimes y) \neq 0$ pour tout x de $E \setminus \{0\}$ et y de $F \setminus \{0\}$ mais qui n'est pas injective.
3. Que se passe-t-il si E ou F est de dimension 1 ?
4. Soient $f : E \to G$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. Existe-t-il une application linéaire $\varphi : E \otimes F \to G$ telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\varphi(x \otimes y) = f(x) + g(y)$?

Exercice 2. (Isomorphismes canoniques)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. **(a)** Montrer que l'application $E \times F \to F \otimes E$ donnée par $(x, y) \mapsto y \otimes x$ est bilinéaire. En déduire qu'il existe une unique application linéaire
$$f : E \otimes F \to F \otimes E$$
qui vérifie $f(x \otimes y) = y \otimes x$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$. On construit de même une application linéaire $g : F \otimes E \to E \otimes F$ telle que $g(y \otimes x) = x \otimes y$.
   (b) Montrer que $f \circ g = \mathrm{Id}_{F \otimes E}$ et que $g \circ f = \mathrm{Id}_{E \otimes F}$. En particulier f et g réalisent des isomorphismes entre $E \otimes F$ et $F \otimes E$.
2. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique $\gamma : E^* \otimes F^* \cong (E \otimes F)^*$.
3. Montrer qu'il existe un isomorphisme canonique $\Phi : E^* \otimes F \cong \mathrm{Hom}(E, F)$ tel que pour tout $\lambda \in E^*$ et $y \in F$, $\Phi(\lambda \otimes y) = (x \mapsto \lambda(x)y)$.

Exercice 3. (Produit tensoriel d'applications linéaires)

Soient E, E' et F, F' des espaces vectoriels de dimension finie. On se donne des applications linéaires $u : E \to E'$ et $v : F \to F'$.

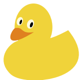
1. Soient $V \subset E$ un sous-espace vectoriel de E et $W \subset F$ un sous-espace vectoriel de F. Montrer que $V \otimes W$ est isomorphe au sous-espace vectoriel de $E \otimes F$ engendré par les $x \otimes y$ avec $x \in V$ et $y \in W$. On identifiera alors $V \otimes W$ à ce sous-espace de $E \otimes F$.
2. Montrer que, via l'identification de la question 1, $\mathrm{Im}(u \otimes v) = \mathrm{Im}(u) \otimes \mathrm{Im}(v)$. En déduire que $\mathrm{rg}(u \otimes v) = \mathrm{rg}(u)\,\mathrm{rg}(v)$.
3. Montrer que u et v sont surjectives (*resp.* injectives) si et seulement si $u \otimes v$ l'est.
4. Donner une formule générale pour $\ker(u \otimes v)$ en fonction de $\ker(u)$ et $\ker(v)$.

Exercice 4.

Soit E et F deux espaces vectoriels. Pour $\alpha \in E \otimes F$, on définit le rang de α comme le plus petit entier $r \geqslant 0$ tel que α peut s'écrire comme une somme de r tenseurs simple.

Soit $f \in \mathrm{Hom}(E, F)$. On considère l'élément α de $E^* \otimes F$ correspondant à f via l'isomorphisme $E^* \otimes F \cong \mathrm{Hom}(E, F)$ (voir Exercice 2 question 3).

Montrer que le rang de f en tant qu'application linéaire est égal au rang de $\alpha \in E^* \otimes F$. Comparer ce résultat à celui de l'exercice 3 du TD 6.



Exercice 5. (Propriété universelle)

Soient E et F des espaces vectoriels et soient $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in F^n$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$$

dans $E \otimes F$ si et seulement si pour toute forme bilinéaire $f : E \times F \to K$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) = 0.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 6. (Trace et évaluation)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire $\mathrm{ev} : E \otimes E^* \to K$ telle que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in E^*$,
$$\mathrm{ev}(x \otimes \lambda) = \lambda(x).$$
2. On identifie K et K^*. Vérifier que la transposée de ev est l'application $\lambda \mapsto \lambda \cdot \mathrm{ev}$.
3. Soit $\gamma : (E \otimes E^*)^* \to E^* \otimes E^{**}$ l'isomorphisme de l'exercice 2. Soit (e_i) une base de E. Montrer que pour tout $\varphi \in (E \otimes E^*)^*$, on a
$$\gamma(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i \otimes \cdot) \otimes \varphi(\cdot \otimes e_i^*).$$
4. On définit l'application linéaire $c : K \to E^* \otimes E$ par
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "{}^t\mathrm{ev}"] \arrow[rrr, bend right, "c"'] & (E \otimes E^*)^* \arrow[r, "\gamma"] & E^* \otimes E^{**} \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \tau"] & E^* \otimes E. \end{tikzcd}$$
où τ est l'isomorphisme $E^{**} \cong E$ de bidualité. Montrer à l'aide des questions précédentes que $c(1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes e_i$.
5. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que la composée
$$K \xrightarrow{c} E^* \otimes E \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes f} E^* \otimes E \xrightarrow{\mathrm{ev}} K$$
est égale à la multiplication par la trace de f.
6. En déduire que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}({}^t f)$ et $\mathrm{Tr}(u \otimes v) = \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{Tr}(v)$ (pour la deuxième question on pourra remarquer que l'identification $K \otimes K = K$ est en fait l'application $a \otimes b \mapsto a \times b$).

Exercice 7. (Carré symétrique et carré alterné)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On définit le carré symétrique de E comme le quotient

$$\mathrm{Sym}^2(E) := E \otimes E / \operatorname{Vect}(x \otimes y - y \otimes x)_{x,y \in E},$$

et le carré alterné de E comme le quotient

$$\Lambda^2(E) := E \otimes E / \operatorname{Vect}(x \otimes x)_{x \in E}.$$

On notera $S(E \times E)$ (*resp.* $A(E \times E)$) les formes bilinéaires symétriques (*resp.* alternées) $\phi : E \times E \to K$.

1. Montrer que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Sym}^2(E)^* \cong S(E \times E) \quad \text{et} \quad \Lambda^2(E)^* \cong A(E \times E).$$

2. Pour x, $y \in E$, on note xy (*resp.* $x \wedge y$) l'image de $x \otimes y$ dans $\mathrm{Sym}^2(E)$ (*resp.* $\Lambda^2(E)$). Donner des bases et les dimensions de $\mathrm{Sym}^2(E)$ et $\Lambda^2(E)$.
3. On suppose dans cette question que $\operatorname{car}(K) \neq 2$.
   (a) Montrer que $\Lambda^2(E) = E \otimes E / \operatorname{Vect}(x \otimes y + y \otimes x)_{x,y \in E}$.
   (b) On note $\tau : E \otimes E \to E \otimes E$ l'application linéaire telle que pour tous x, $y \in E$, on a $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$. Montrer que l'on a une décomposition

$$E \otimes E = \ker(\tau - \mathrm{Id}_{E \otimes E}) \oplus \ker(\tau + \mathrm{Id}_{E \otimes E}).$$

   En déduire que $\mathrm{Sym}^2(E) \cong \ker(\tau - \mathrm{Id}_{E \otimes E})$ et que $\Lambda^2(E) \cong \ker(\tau + \mathrm{Id}_{E \otimes E})$.
   On appelle $\ker(\tau - \mathrm{Id}_{E \otimes E})$ le sous-espace des *tenseurs symétriques* et $\ker(\tau + \mathrm{Id}_{E \otimes E})$ le sous-espace des *tenseurs antisymétriques*.
4. On note $K[X_1, \dots, X_n]_2$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré 2 en les variables $X_1, \dots, X_n$. Montrer que si $\dim(E) = n$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Sym}^2(E^*) \cong K[X_1, \dots, X_n]_2$$

   donné par un choix de base de E.

Exercice 8. (Produit tensoriel de formes quadratiques)

Soient E_1, E_2 deux K-espaces vectoriels de dimension finie, avec K de caractéristique différente de 2.

1. Soient $q_1 \in \mathcal{Q}(E_1)$ et $q_2 \in \mathcal{Q}(E_2)$. On note ϕ_1 et ϕ_2 leurs formes polaires respectives. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\phi : (E_1 \otimes E_2)^2 \to K$ telle que pour tous x_1, $y_1 \in E_1$, x_2, $y_2 \in E_2$,

$$\phi(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = \phi_1(x_1, y_1)\phi_2(x_2, y_2).$$

2. En déduire qu'il existe une unique forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(E_1 \otimes E_2)$ telle que pour tous $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $q(x_1 \otimes x_2) = q_1(x_1)q_2(x_2)$. On notera cette forme quadratique $q_1 \otimes q_2$.
3. Soient e_1, e_2 des bases de E_1 et E_2 respectivement. Exprimer la matrice de $q_1 \otimes q_2$ dans la base $e_1 \otimes e_2$ en fonctions de celle de q_1 dans la base e_1 et de celle de q_2 dans la base e_2.
4. Quel est le rang de $q_1 \otimes q_2$?
5. On suppose q_1 et q_2 non dégénérées. Quel est le discriminant de $q_1 \otimes q_2$?
6. Exprimer la signature de $q_1 \otimes q_2$ en fonction des signatures de q_1 et de q_2 lorsque $K = \mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soient E, F, G, et P des espaces vectoriels et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires.

1. **(a)** Montrer que si g est surjective alors $g \otimes \mathrm{Id}_P : F \otimes P \to G \otimes P$ est surjective, et que si $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$ alors $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_P) \subset \ker(g \otimes \mathrm{Id}_P)$.

   (b) On suppose g surjective et $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$. Soit $r : G \to F$ une *fonction* vérifiant $g \circ r = \mathrm{Id}_G$. Montrer que l'application $h : G \times P \to (F \otimes P)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_P)$ définie par

$$h : \left| \begin{array}{ccc} G \times P & \longrightarrow & (F \otimes P)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_P) \\ (x, y) & \longmapsto & \overline{r(x) \otimes y} \end{array} \right.$$

   est bilinéaire.

   (c) En déduire que si g est surjective et $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$, alors $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_P) = \ker(g \otimes \mathrm{Id}_P)$.

   (d) Montrer que si f est injective, alors $f \otimes \mathrm{Id}_P$ est injective.

On a prouvé que si la suite

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

est exacte, alors la suite

$$0 \longrightarrow E \otimes P \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_P} F \otimes P \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_P} G \otimes P \longrightarrow 0$$

l'est aussi.

2. Prouver réciproquement que si $0 \longrightarrow E \otimes P \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_P} F \otimes P \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_P} G \otimes P \longrightarrow 0$ est exacte alors $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ l'est aussi.

Exercice 10. (Algèbres et produits tensoriels)

On dit que $(A, +, \cdot, \times)$ est une K-algèbre si :

(a) $(A, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel

(b) la loi $\times$ est une application bilinéaire de $A \times A$ dans A.

Soient A et B des K-algèbres.

1. Montrer qu'il existe une application bilinéaire $m : (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to A \otimes B$ vérifiant

$$m(a \otimes b, a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$$

2. Montrer que m munit $A \otimes B$ d'une structure de K-algèbre.
3. Montrer que les K-algèbres $K[X] \otimes K[Y]$ et $K[X, Y]$ sont isomorphes.
4. Montrer que le morphisme naturel de K-algèbres de $K(X) \otimes K(Y)$ vers $K(X, Y)$ est injectif mais non surjectif.